Damien

Thursday 10 March 2022 14:57

<u>Références</u> : (1) Church - Farb - Putman

(2) Broaddus, Homology of the curve complex and the Steinberg module of the MCG

Damien recommends

<u>Rappels</u>

$g \geq 2$

S_g surface compacte orientée sans bord

" $g = (g, 0)$ "

- $\mathrm{vcd}(\mathrm{Mod}_g) = 4g - 5$ (Antrong)

i.e.

$\exists W$ Mod_g-module$/\mathbb{Q}$ t.q

$H^{4g-5}(\mathrm{Mod}_g, W) \neq 0$

$\forall V/\mathbb{Q}$ Mod_g-module,

$H^{>4g-5}(\mathrm{Mod}_g, V) = 0$

$$\check{H}^{>4g-5}(\mathrm{Mod}_g, V) = 0$$

- $\mathcal{C}_g = \mathcal{C}(S_g)$ cx des courbes

K-simplexes $=$ $(K+1)$-uplets de classes distinctes de courbes fermées simples de représentants disjoints (non-contractiles)

<u>Proposition</u> : $\mathcal{C}_g$ a le type d'homotopie d'un bouquet de sphères de dim $2g-2$

⚠ $\neq 2g-3+n$ pour $n=0$

<u>Remarque</u> : $\mathcal{C}_{g,1} \longrightarrow \mathcal{C}_g$ est une équivalence d'homotopie.

- (Sylvain) Constante de Margulis :

$\exists\, \delta > 0$, $\forall$ métrique sur S_g, $\forall \gamma_1, \gamma_2$ géodésique de longueur $\leq \delta$, $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \emptyset$

$$\mathcal{T}_g^{thick} \subset \mathcal{T}_g$$

$\mathcal{T}_g^{\text{thick}} \subset \mathcal{T}_g$

$\shortparallel$

ensemble des classes de métriques qui n'ont pas de géodésique de longueur $< \delta$

Pour une telle métrique,

$$(S_g)_{<\delta} = \emptyset \qquad (S_g)_{\geq\delta} = S_g$$

Fait : • $\mathcal{T}^{\text{thick}}$ est une variété à coins de dim $6g-6$

$$\widetilde{\mathcal{C}}_g^{\text{thick}} \subset \widetilde{\mathcal{C}}_g \xrightarrow{\sim} (\mathbb{R}_+^*)^{3g-3} \times \mathbb{R}^{3g-3}$$

• $\widetilde{\mathcal{C}}_g^{\text{thick}}$ est contractile (censé être évident?)

Prop : $\partial \widetilde{\mathcal{C}}_g^{\text{thick}}$ a le type d'homotopie de $\mathcal{C}_g$.

Idée de dém : $\forall \sigma$ simplexe de $\mathcal{C}_g$

On définit $T_\sigma \subset \partial T_0^{\text{thick}}$

On définit $T_\sigma \subset \partial T_g^{thick}$

$\quad\quad\quad\quad //$

métriques pour lesquelles $\exists$ représentant de σ pour des géodésiques de longueur δ

On peut montrer :

1- T_σ sont contractiles !

2- $T_\sigma \cap T_{\sigma'} = \begin{cases} \emptyset & \text{si } \sigma \cup \sigma' \text{ pas un simplexe} \\ T_{\sigma \cup \sigma'} & \text{sinon} \end{cases}$

T_g^{thick} stable par l'action de Mod_g.

<u>Thm</u> (Mumford) :

$$T_g^{thick} / Mod_g =: M_g^{thick}$$

est compacte.

Grosse parenthèse :

Groupe à dualité

Thm (Bieri – Eckmann) :

Si G est un gp t.q. $\mathbb{Z}$ admet une rés proj finie

et $H^k(G; \mathbb{Z}G) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq n \\ \text{sans torsion si } k = n \end{cases}$

Q

alors G est un gp à dualité de dim n

Pas exactement la déf :

On a un G-mod C t.q.

$$H^{n-k}(G; V) \cong H_k(G; V \otimes C)$$

module dualisant

$$C \cong H^n(G, \mathbb{Z}G)$$

Dualité(s) de Poincaré

X var orientée ~~compacte~~ sans bord de dim n

$$H_c^{n-k}(X;\mathbb{Z}) \simeq H_k(X;\mathbb{Z})$$

Si X a du bord :

$$H_c^{n-k}(X;\mathbb{Z}) \simeq H_k(X,\partial X;\mathbb{Z})$$

$$H_c^{n-k}(X,\partial X;\mathbb{Z}) \simeq H_k(X;\mathbb{Z})$$

Sup X compacte admet rev universel

$\tilde{X}$ var à bord $X = \tilde{X}/G$

$$q := \dim(\tilde{X})$$

$$H^k(G;\mathbb{Z}G) \simeq H^k(X;\mathbb{Z}G)$$

$$\simeq H_c^k(\tilde{X};\mathbb{Z})$$

$$\simeq H^k_c(\tilde{X}; \mathbb{Z})$$

$$\simeq H_{q-k}(\tilde{X}, \partial\tilde{X}; \mathbb{Z})$$

Sup en plus que le type d'homotopie du bord est un bouquet de sphères de dim m et que $\tilde{X}$ contractile.

Alors $H_{q-k}(\tilde{X}, \partial\tilde{X}; \mathbb{Z}) \simeq H_{q-k-1}(\partial\tilde{X}; \mathbb{Z})$

(suite exacte longue $\nearrow$)

$$\begin{cases} \mathbb{Z}^{\text{truc}} & \text{si } q-k+1 = m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$X = \mathcal{M}_g^{\text{thick}}$, $\tilde{X} = \mathcal{T}_g^{\text{thick}}$, $G = \mathrm{Mod}_g$

$\mathbb{Z} \rightsquigarrow \mathbb{Q}$

$q = 6g - 6$

$m = 2g - 2$

$q - k - 1 = m$

$6g - 6 - k - 1 = 2g - 2$

$$\boxed{k = 4g - 5}$$

Donc Mod_g est un gp à $\mathbb{Q}$-dualité de dim $4g-5$.

Le module dualisant est

$H^{4g-5}(G; \mathbb{Z}G) \otimes \mathbb{Q} \simeq H_{2g-2}(\partial \tilde{X}, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}$

$$= \underbrace{H_{2g-2}(\mathcal{C}_g ; \mathbb{Z})}_{St_g \text{ ``module de Steinberg''}} \otimes \mathbb{Q}$$

Récupère le résultat d'Anthony :

$$H^k(Mod_k ; \underset{\substack{\uparrow \\ \mathbb{Q}\text{-rep}}}{V}) = H_{4g-5-k}(Mod_g , V \otimes St_g \otimes \mathbb{Q})$$

$= 0$ si $k > 4g-5$.

$H^{4g-5}(Mod_g ; \mathbb{Q}) \simeq H_0(Mod_g ; St_g \otimes \mathbb{Q})$

$$H^{4g-5}(\mathrm{Mod}_g;\mathbb{Q}) \simeq H_0(\mathrm{Mod}_g; St_g \otimes \mathbb{Q})$$

$$= (St_g \otimes \mathbb{Q})_{\mathrm{Mod}_g}$$

$$\mathcal{C}_{g,1} \xrightarrow{\text{equiv. hom.}} \mathcal{C}_g$$

$A_\infty(S_g,*) =$ sgt arcs non remplissant

$$\bigcap$$

$$A(S_g,*)$$

$$H_{2g-2}(\mathcal{C}_g) \cong H_{2g-2}(\mathcal{C}_{g,1})$$

$$\cong H_{2g-2}(A_\infty(S_g,*))$$

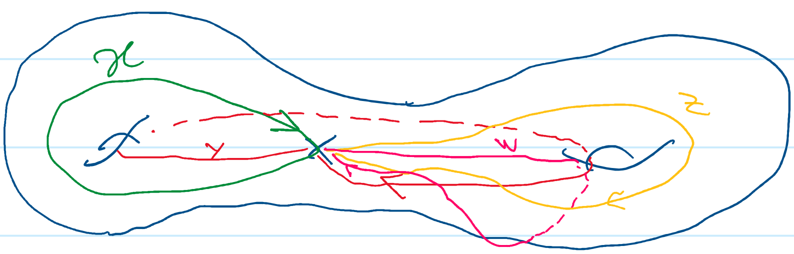
$$\cong \overline{H}_{2g-1}\left(A(S_g,*)/A_\infty(S_g,*)\right)$$

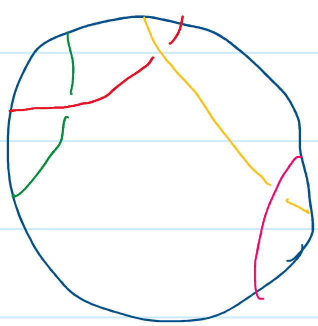
$$= \left. C_{2g-1}(A/A_\infty) \middle/ \partial C_{2g}(A/A_\infty) \right. = St_g \otimes \mathbb{Q}$$

$$= C_{2g-1}(A/A_\infty) \Big/ \partial C_{2g}(A/A_\infty) \simeq St_g \otimes \mathbb{Q}$$

car ∂ :

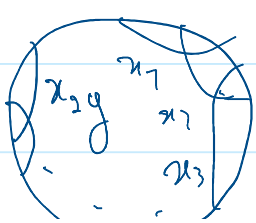
$$\begin{tikzcd} C_{2g-1}(A) \arrow[r] \arrow[dr] & C_{2g-2}(A) \\ & C_{2g-2}(A_\infty) \arrow[u] \end{tikzcd}$$



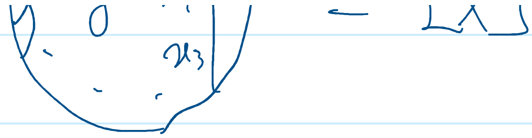


$\rightsquigarrow$ reconstruire la surface

Thm (Broaddus) : $St_g \otimes \mathbb{Q}$ est un Mod_g-module cyclique

engendré par 

$= [X]$



Tout élément $[Y]$ est de la forme $g \cdot [X]$.

Donc $\left(\mathcal{E}t_g \otimes \mathbb{Q}\right)_{Mod_g}$ est de dim au plus 1, engendré par la classe de $[X]$.