Caractéristique d'Euler - Ricardo

Saturday 29 January 2022 10:31

Le but de l'exposé sera de calculer la caractéristique orbifold d'Euler de $\mathcal{M}_{g,1}$:

<u>Théorème:</u> (H-Zagier '86) $\chi^{orb}(\mathcal{M}_{g,1}) = \zeta(1-2g)$

$\chi(\Gamma_{g,1}) \qquad = -\frac{B_{2g}}{2g}$

On va décortiquer cette équation. Le membre droite de l'égalité on le comprend bien :

$$\underbrace{\zeta(1-2g)}_{\text{hasard}} = -\frac{B_{2g}}{2g} \leftarrow \text{Bernoulli}$$

$$\sum_{n \geq 0} \frac{B_n z^n}{n!} = \frac{z}{e^z - 1}.$$

Plan : • apliquer le Théorème
• Réduire le calcul à un problème combinatoire très difficile

$$\chi^{orb}(\mathcal{M}_{g,1}) \sim (-1)^g \frac{(2g-1)!}{2^{2g-1}\pi^{2g}}$$

$\Rightarrow$ croissance rapide des # de Betti de $\mathcal{M}_{g,1}$

$\chi^{orb} \sim$ Char d'euler.

Gauche : Soit T une variété contractile et $\Gamma \curvearrowright T$ une action proprement discontinue. Dans ce cas, les groupes d'isotropie sont finis et T/Γ est une orbifold.

(Pour tout $[x] \in T/\Gamma$ on a un groupe d'automorphismes $\mathrm{Aut}\,[x] = \mathrm{Stab}\, x \leq [\Gamma : \Gamma']$)

Soit $T/\Gamma = M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_{[\Gamma:\Gamma']}$

où $M_n = \{ x \in T/\Gamma \mid |\mathrm{Aut}\, x| = n \}$

La caractéristique d'Euler orbifolde est

$$\chi_{orb}(T/\Gamma) = \sum_n \frac{\chi(M_n)}{n}.$$

plus gen, si $T \not\simeq *$ $\chi_{orb}(T) = \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{gh=hg} \chi(T^{g,h})$

Pour comprendre mieux ce qu'il se passe on va parler de car d'Euler pour les groupes:

Soit Γ discret Y CW-contractile et $\Gamma \curvearrowright Y$ céllulaire. On va suppose $|\mathrm{Stab}(\sigma)| < \infty$

On suppose d'abord que l'action est libre
$\Rightarrow$ Γ sans torsion

[gp fini ne peut pas agir sans pt fixes sur un cx contractile (car a dim coh infinie)]

Dans ce cas, $\overset{CW}{Y/\Gamma} = B\Gamma$ et $H^i(Y/\Gamma) = H^i(\Gamma)$.

On définit $\chi(\Gamma) := \sum (-1)^i \dim H^i(\Gamma; \mathbb{Q})$
qui se calcule aussi avec le # de cellules de Y/Γ.
Y pas fini, mais Y/Γ oui.

<u>Trop contraignant</u> car ne permet que les Γ de dim cohomologique finie.

<u>En général</u> On choisit $\Gamma' \subset \Gamma$ d'indice

En général On choisit $\Gamma' \subset \Gamma$ d'indice fini qui satisfait les conditions précédentes et on défini

$$\chi(\Gamma) := \frac{\chi(\Gamma')}{[\Gamma : \Gamma']}$$

On vérifie que $\chi(\Gamma) = \sum\limits_{\sigma \in \text{cellules}(X)/\Gamma} \frac{(-1)^{\dim \sigma}}{|\text{Stab}\,\sigma|}$

$\Rightarrow$ Indépendant du choix de Γ'

Ex: 1) G gp fini $\Rightarrow \chi(G) = \frac{1}{|G|}$

2) $SL_2(\mathbb{Z})$ contient un groupe libre de indice 12, $F_2 \cong \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle$. $\quad BF_2 = \infty \overset{\chi}{\longmapsto} -1$

$\Rightarrow \chi(SL_2(\mathbb{Z})) = -\frac{1}{12}$

Prop: $\chi_{orb}(M/\Gamma) = \chi(\Gamma)$.

Dém:

La projection $M/ \xrightarrow{p_i} M/$

Dém.

La projection $p: M/\Gamma' \longrightarrow M/\Gamma$

donne $\chi_{orb}(M/\Gamma) = \frac{1}{[\Gamma:\Gamma']} \underbrace{\chi(M/\Gamma')}_{\substack{\| \\ B\Gamma'}}$

car $|p^{-1}(\Gamma\sigma)| = |\Gamma/\Gamma'| / |\mathrm{Stab}_\Gamma \sigma|$

$$= \frac{\chi(\Gamma')}{[\Gamma:\Gamma']} = \chi(\Gamma)$$

$$\mathcal{M}_{g,1} = \underset{\text{contractile.}}{T_{g,1}} / \Gamma_{g,1}$$

Donc on veut plutôt $\boxed{\text{calculer } \chi(\Gamma_{g,1}).}$

On a vu dans l'exposé d'Anthony que $\Gamma_{g,n}$ est virtuellement sans torsion

<u>Remarque:</u> Ça nous permet de

calculer $\chi(\Gamma_{g,0}) = \chi_{orb}(\mathcal{M}_{g,0})$: $(g>1)$

$$1 \longrightarrow \pi_1(\Sigma_g) \longrightarrow \Gamma_{g,1} \longrightarrow \Gamma_g \longrightarrow 1$$

$$\Rightarrow \quad \chi(\Gamma_g) = \chi(\Gamma_g^1) / \underbrace{\chi(\Sigma)}_{-(2g-2)}$$

$$= + \frac{B_{2g}}{4g(g-1)}$$

$\Gamma_1 = \Gamma_{1,1} = SL_2(\mathbb{Z})$.

On cherche : Un CW-complexe Y fini, contractile avec

$$\Gamma_{g,1} \overset{CW}{\curvearrowright} Y$$

Y sera le "dual de Poincaré" de $A - A_\infty$

Rappel : CW structure de A :
Système d'arcs de rang $n-1$ sont les $n-1$ cellules : $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ t.q. $[\alpha_i]$ = classe d'isotopie de lacet simple (sans auto intersection)

à isotopie de lacet simple (sans auto intersection) basé sur p, et $\alpha_i \cap \alpha_j = \{p\}$, $i \neq j$.

$(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ face de $(\beta_1, \dots, \beta_m)$ si

$\{\alpha_i\} \subset \{\beta_i\}$.

Problème :

A est contractile, mais gp d'iso sont qq'n. et l'action n'est pas proprement discontinue.

$A_\infty \subset A$ sous CW des $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ qui ne remplissent pas $\Sigma_{g,1}$

Remplir : $F - \{\alpha_i\} = \bigcup$ boules.

Théorème (Mumford) :

L'action $\Gamma_{g,1} \circlearrowright A - A_\infty$ est proprement discontinue et

$$\Gamma_{g,1} \circlearrowright A - A_\infty \underset{\text{homéo}}{\cong} \Gamma_{g,1} \circlearrowright \underbrace{T_{g,1}}_{\text{dim } 6g-4}.$$

En particulier, $A - A_\infty$ est contractile. dim $6g-4$

Problème: $A - A_\infty$ pas CW.

CW complexe Y:

$\{$Système d'arcs remplissants $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)\}$

$!!$

$6g-3-n$ cellules de Y.

$(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ face de $(\beta_1, \dots, \beta_m)$ si

$\{\alpha_i\} \supset \{\beta_i\}$

dim $4g-3$, car au moins $2g$ courbes pour remplir $\Sigma_{g,1}$.

Y est contractile (dual de $A \setminus A_\infty$), fini, l'action est proprement discontinue.

On appliquera

On appliquera

$$\chi(\Gamma_{g,1}) = \sum_{\sigma \in \text{cellules}(Y)/\Gamma_{g,1}} \frac{(-1)^{\dim \sigma}}{|\mathrm{Stab}\,\sigma|}.$$

~~**Ex :** $\overset{\Gamma_{g,1}}{SL_2(\mathbb{Z})}$, $g = 1$.~~

~~$\{\text{lacets}\}/_{\text{isotopie}} \cong$ droites de pente $\mathbb{Q}$ $= \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$~~

~~$\Gamma_{g,1}$ agit transitivement.~~

Compter cellules de $Y/\Gamma_{g,1}$:

Système d'arcs remplissant Σ

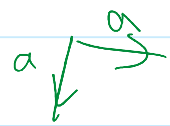
$\Updownarrow$

Décomposition cellulaire de Σ

Soit S^* le dual de Poincaré de cette structure cellulaire

S a une 0-cellule $\Rightarrow$ S^* a une 2-cellule

S^* est un $2n$-gone (étiqueté) !! avec une identification des arêtes orientées deux à deux



On peut aussi revenir en arrière :

$S = S^{**}$

Autrement dit :

compter systèmes d'arcs remplissants

$\Updownarrow$

compter les recollements, soigneusement !

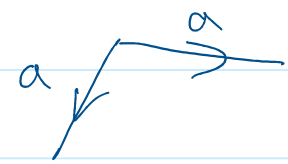
Plus précisément, un système de courbes $\{a_1, \dots, a_n\}$ est un système d'arcs si :

A) Aucun α_i n'est contractile

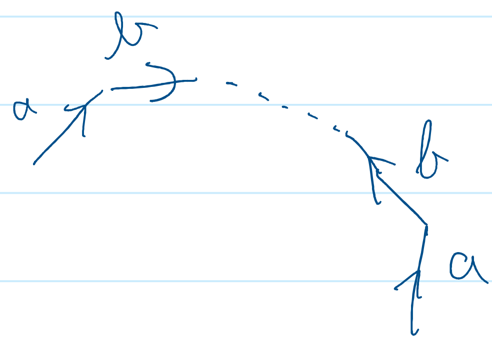
B) Aucun α_i n'est isotope à $\alpha_{j \neq i}$

<u>Lemme</u> : Un système de courbes satisfait :

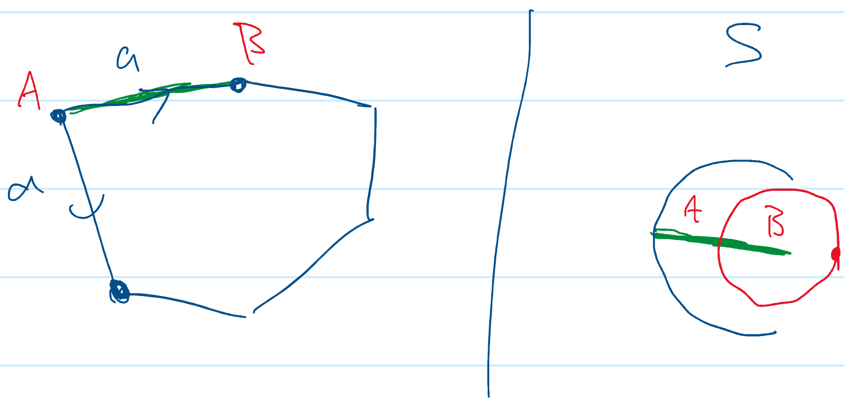
A) ssi il n'y a pas



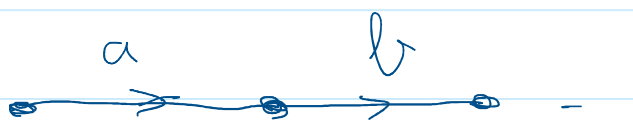
B) ssi $\nexists$

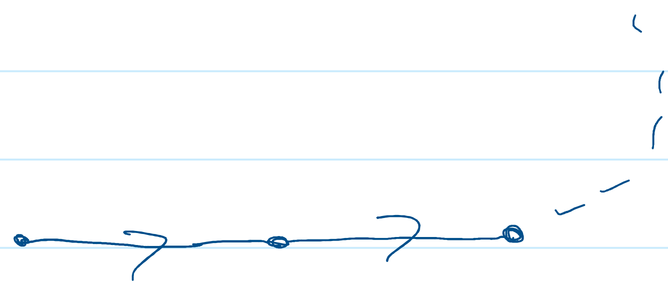


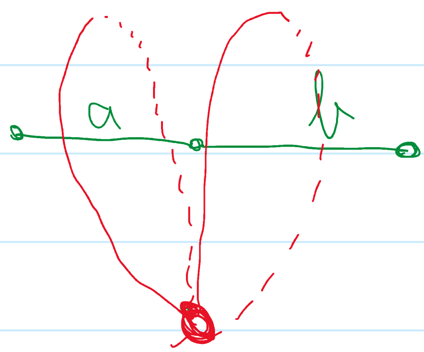
A :



B :







Soit

$\lambda_g(n) = \#\{$recollements (étiqueté) d'un $2n$-gone en une surface de genre g satisfaisant A) et B)$\}$

$\mu_g(n)$ A)

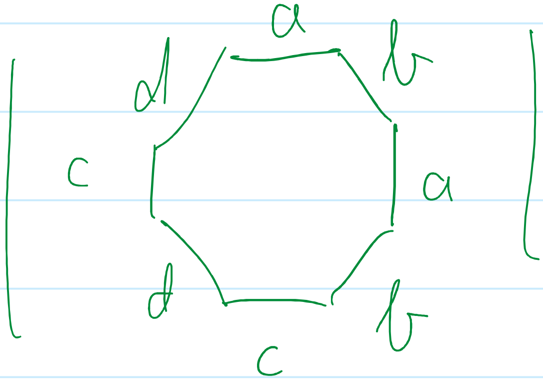
$\varepsilon_g(n)$ aucune contrainte.

Corollaire : $\lambda_g(6g-2)=0$

$$\chi(\Gamma_{g,1}) = \sum_{n} (-1)^{n-1} \frac{\lambda_g(n)}{2n}$$

Dém : $\boxed{\Gamma_{g,n} \text{ agit par rotations}}$

$\lambda_g(n)$ se partitionne en classes d'équivalence de symétrie de rotation



$= 4$

{ choisit

$\sigma^i \in 6g-3-n$-cell(Y)

$\{\sigma^i\}$ représentants par rapport à l'action de $\Gamma_{g,1}$

S'il y a m_i représentants dans une classe $[\sigma^i]_{\sim}$

$|\mathrm{Stab}\,\sigma^i| =$

$$|\mathrm{Stab}\,\sigma^i| = |C_{\frac{2n}{m_i}}| = \frac{2n}{m_i}.$$

$$\rightsquigarrow \quad \sum_i \frac{1}{|\mathrm{Stab}\,\sigma^i|} = \sum_i \frac{m_i}{2n} = \frac{\lambda_g(n)}{2n}$$

Lemme :

$$\varepsilon_g(n) = \sum_i \binom{2n}{i} \mu_g(n-i)$$

$$\mu_g(n) = \sum_i \binom{n}{i} \lambda_g(n-i)$$

Dém : Première equation : On oriente $\partial\Delta$ et numérote les sommets consec

Soit σ un recollement d'un $2n$-gone Δ. Si deux arêtes consécutives sont recollées, on les recolle et on itère cette procédure. On obtient un $2n-2i$-gone Δ_σ avec un recollement σ' qui satisfait A). L'étiquetage est aussi hérité.

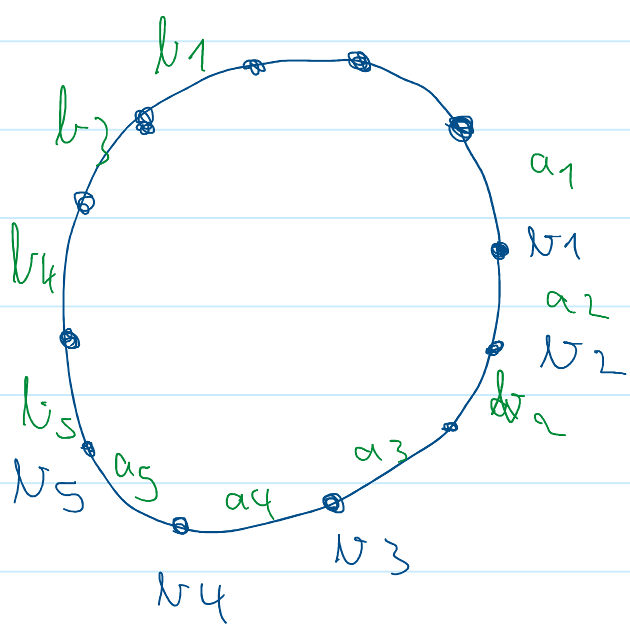
Claim : chaque (Δ_σ, σ') peut être

Claim : chaque (Δ_σ, σ') peut être obtenu d'exactement $\binom{2n}{i}$ manières différentes

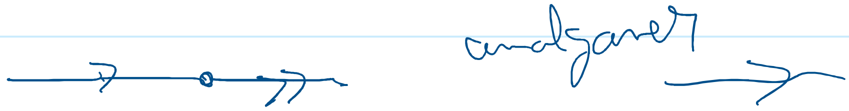
Chaque recollement produit un point à l'intérieur de Δ_σ : $w_1, \dots, w_i$. Soit v_j le plus petit sommet de Δ qui s'envoie sur w_j. $\underbrace{\{v_1, \dots, v_i\}} \subset \{1, \dots, 2n\}$.

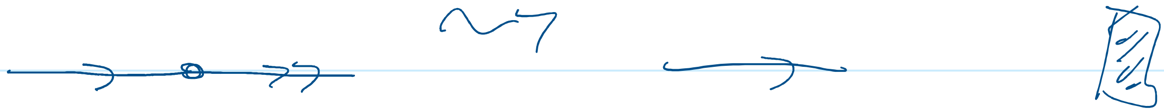
Détermine entièrement σ étant donné (Δ_σ, σ').

Pour revenir en arrière :



2ème Equation :





Taches

i) Trouver une formule pour $\varepsilon_g(n)$

ii) S'en servir pour calculer χ.

Lemme : Si $\{\varepsilon(n)\}$ et $\{\lambda(n)\}$ satisfont le lemme précédant et $\varepsilon(n) = \binom{2n}{n+1} F(n)$

F = polynome avec $F(-1)=0$, alors

$$\chi := \sum_n \frac{(-1)^{n-1}}{2n}\lambda(n) = F(0)$$

Preuve : Fonctions génératrices (dérivée, intégrale)

Formule de Harer-Zagier

$$\varepsilon_g(n) = \frac{(2n)!}{\cdots} \cdots x^{2g}\left[\left(\frac{x/2}{\cdots}\right)^{n+1}\right]$$

$$\varepsilon_g(n) = \frac{2\, n!}{(n+1)!\,(n-2g)!} \times \text{coeff de } x^{2g} \left[\left(\frac{x/2}{\tanh x/2} \right)^{n+1} \right]$$

<u>Preuve indirecte</u> : Exprimer

$$C(n,K) = \sum_{0 \leq g \leq \frac{n}{2}} \varepsilon_g(n)\, K^{n+1-2g}$$

compte colloriages

Comme une intégrale sur l'espace des matrices hermitiennes $K \times K$. dim K^2