Les suites spectrales (c'est comme le foie gras)

(03/02/2022)

0) Motivation

On veut calculer la cohomologie d'un complexe

$$0 \to C^0 \xrightarrow{d} C^1 \xrightarrow{d} \cdots \to C^{n-1} \xrightarrow{d} C^n \xrightarrow{d} C^{n+1} \to \cdots \qquad d \circ d = 0.$$

$$H^n(C^\cdot) = \frac{\ker(d : C^n \to C^{n+1})}{\mathrm{Im}(d : C^{n-1} \to C^n)}$$

Exemples :

. X esp. top., $C^n = C^n_{sing}(X) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}\left(\bigoplus_{\sigma : \Delta^n \to X} \mathbb{K}\sigma, \mathbb{K}\right)$

$$H^n(C^\cdot) = H^n_{sing}(X)$$

(variantes cellulaires, simpliciales)

. G groupe, $C^n = C^n_{sing}(BG)$ ou $C^n_{simp}(BG)$ ou ...

$$H^n(C^\cdot) = H^n(G)$$

. X var. diff., $C^n = \Omega^n(X)$

$$H^n(C^\cdot) = H^n_{dR}(X)$$

On veut casser le problème du calcul de $H^\bullet(-)$ en des problèmes plus simples.

<u>Exemple :</u> $C^\bullet = D^\bullet \oplus E^\bullet$ (càd $C^n = D^n \oplus E^n$, $d(D^n) \subset D^{n+1}$, $d(E^n) \subset E^{n+1}$)

$$\Rightarrow H^n(C^\bullet) = H^n(D^\bullet) \oplus H^n(E^\bullet)$$

(en topologie : $C^\bullet_{sing}(X \sqcup Y) = C^\bullet_{sing}(X) \oplus C^\bullet_{sing}(Y)$)

En pratique, on a une structure plus faible : filtration.

(en topologie : filtration d'un CW-complexe par ses n-squelettes)

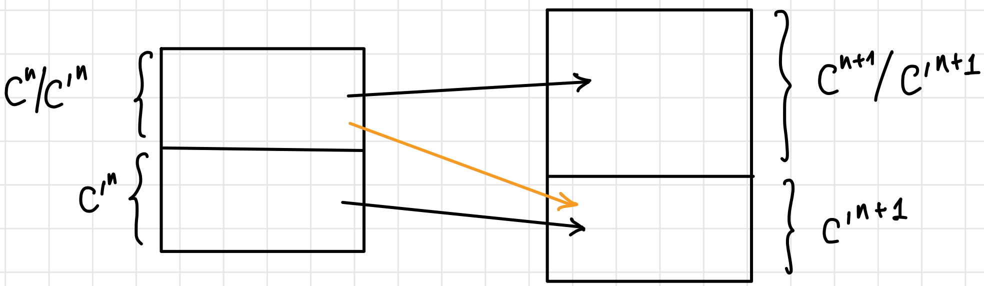
1) Le cas d'une filtration à deux crans

On se donne un sous-complexe $C'^{\bullet} \subset C^{\bullet}$

(càd $C'^n \subset C^n$, $d(C'^n) \subset C'^{n+1}$)

On a le complexe quotient $C^{\bullet}/C'^{\bullet}$.

Point crucial : En général on n'a pas $C^{\bullet} \simeq C'^{\bullet} \oplus C^{\bullet}/C'^{\bullet}$



$$C^n \longrightarrow C^{n+1}$$

Comment retrouver $H^{\bullet}(C)$ à partir de $H^{\bullet}(C')$ et $H^{\bullet}(C/C')$?

$\rightsquigarrow$ Suite exacte longue en cohomologie : $(0 \to C'^{\bullet} \to C^{\bullet} \to C^{\bullet}/C'^{\bullet} \to 0)$

(Hurewicz 1941, ...)

$$0 \to H^0(C') \to H^0(C) \to H^0(C/C') \xrightarrow{d_1} H^1(C') \to H^1(C) \to \cdots$$

$$\cdots \to H^{n-1}(C/C') \xrightarrow{d_1} H^n(C') \to H^n(C) \to H^n(C/C') \xrightarrow{d_1} H^{n+1}(C') \to \cdots$$

Dit autrement, on a des suites exactes courtes

$$0 \to \operatorname{coker}(d_1^{n-1}) \longrightarrow H^n(C) \longrightarrow \ker(d_1^n) \longrightarrow 0$$

Quel est ce "morphisme connectant" $d_1 : H^n(C/C') \longrightarrow H^{n+1}(C')$?

- un élément de $H^n(C/C')$ est représenté par un $x \in C^n$ tel que $dx \in C'^{n+1}$.
- on a $d_1([x]) = [dx]$.

2) La suite spectrale d'un complexe filtré

On se donne une filtration (décroissante)

$$C^\bullet = F^0C^\bullet \supset F^1C^\bullet \supset F^2C^\bullet \supset \cdots \supset F^nC^\bullet \supset F^{n+1}C^\bullet \supset \cdots$$

et les gradués $gr^n_F C^\bullet = F^nC^\bullet / F^{n+1}C^\bullet$.

Elle induit une filtration sur la cohomologie

$$F^pH^n(C^\bullet) = \{[x] \ , x \in F^pC^n, dx = 0\} = \mathrm{Im}\left(H^n(F^pC^\bullet) \to H^n(C^\bullet)\right)$$

- La suite spectrale calcule $gr^p_F H^n(C^\bullet)$ en partant de $gr^p_F C^\bullet$.

- Elle se présente sous la forme d'une suite de pages bigraduées $E_r^{\bullet,\bullet}$, pour $r = 0, 1, 2, \ldots$ avec $E_0^{p,q} = gr^p_F C^{p+q}$ avec des différentielles ($d_0 : E_0^{p,q} \to E_0^{p,q+1}$ est juste d).

- On passe d'une page à la suivante en prenant la cohomologie.

- Convergence : $E_\infty^{p,q} = gr^p_F H^{p+q}(C^\bullet)$.

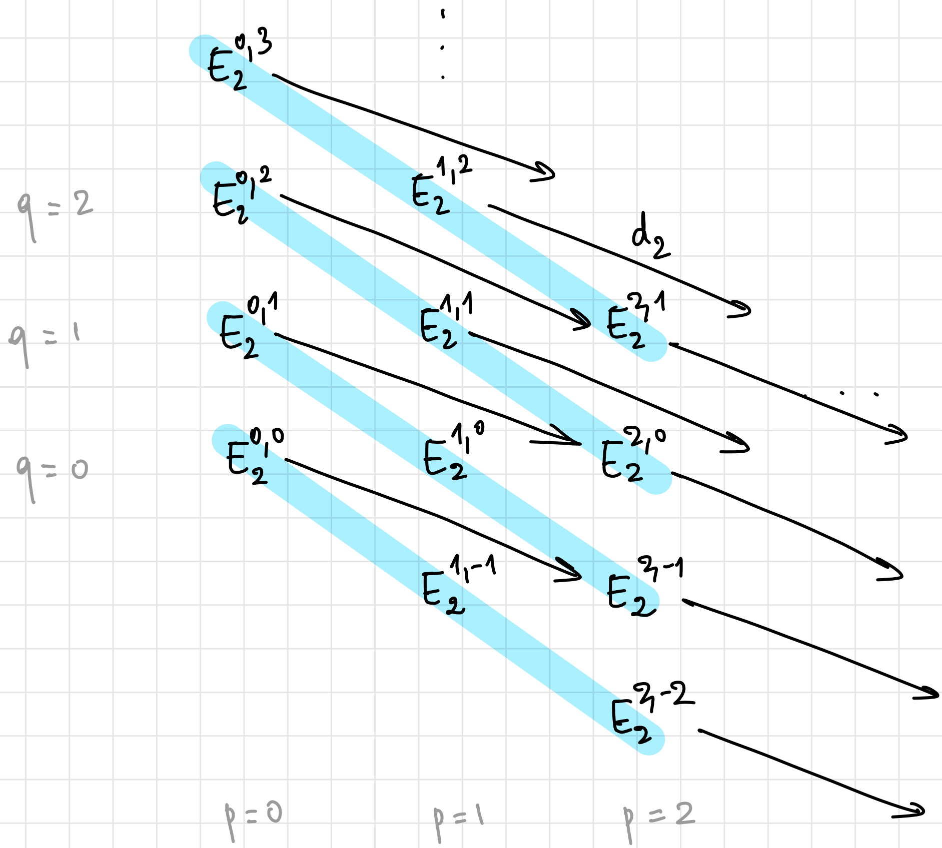
La 0-ème page $E_0^{p,q} = gr_F^p C^{p+q}$

$$
\begin{tikzcd}
 & \vdots & & & \\
 & gr_F^0 C^3 \arrow[u] & \vdots & & \\
q=2 & gr_F^0 C^2 \arrow[u] & gr_F^1 C^3 \arrow[u] & \vdots & \\
q=1 & gr_F^0 C^1 \arrow[u, "d_0"'] & gr_F^1 C^2 \arrow[u] & gr_F^2 C^3 \arrow[u] & \\
q=0 & gr_F^0 C^0 \arrow[u, "d_0"'] & gr_F^1 C^1 \arrow[u] & gr_F^2 C^2 \arrow[u] & \cdots \\
q=-1 & 0 \arrow[u] & gr_F^1 C^0 \arrow[u] & gr_F^2 C^1 \arrow[u] & \\
q=-2 & & 0 \arrow[u] & gr_F^2 C^0 \arrow[u] & \\
 & & & 0 \arrow[u] & \\
 & p=0 & p=1 & p=2 &
\end{tikzcd}
$$

La 1ère page $E_1^{p,q} = H^{p+q}(gr_F^p C^\cdot)$

$$
\begin{tikzcd}
 & \vdots & & & \\
 & H^3(gr_F^0 C) & \vdots & & \\
q=2 & H^2(gr_F^0 C) \arrow[r] & H^3(gr_F^1 C) & \vdots & \\
q=1 & H^1(gr_F^0 C) \arrow[r] & H^2(gr_F^1 C) \arrow[r, "d_1"] & H^3(gr_F^2 C) & \\
q=0 & H^0(gr_F^0 C) \arrow[r, "d_1"] & H^1(gr_F^1 C) \arrow[r, "d_1"] & H^2(gr_F^2 C) \arrow[r] & \cdots \\
 & 0 \arrow[r] & H^0(gr_F^1 C) \arrow[r] & H^1(gr_F^2 C) \arrow[r] & \cdots \\
 & & 0 \arrow[r] & H^0(gr_F^2 C) \arrow[r] & \cdots \\
 & p=0 & p=1 & p=2 &
\end{tikzcd}
$$

La 2ème page $E_2^{p,q}$



Théorème général : (Leray 1946)

$(C^\bullet, F)$ un complexe filtré. On peut définir, pour tout $r \geq 0$, une page $E_r^{\bullet,\bullet}$ avec différentielles $d_r : E_r^{p,q} \to E_r^{p+r, q-r+1}$, telles que :

- $E_{r+1}^{p,q} = \text{"} H^\bullet(E_r^{\bullet,\bullet}) \text{"} = \ker(d_r^{p,q}) / \operatorname{Im}(d_r^{p-r, q+r-1})$
- Sous des hypothèses de finitude, la suite spectrale **converge**

$$E_1^{p,q} = H^{p+q}(gr_F^p C^\bullet) \Longrightarrow E_\infty^{p,q} = gr_F^p H^{p+q}(C^\bullet)$$

Utilité pratique : Souvent il est "impossible" de calculer E_r pour $r \geq 3$. Mais la connaissance de E_1 ou E_2 donne une **borne supérieure** sur E_∞ puisqu'à chaque étape, $E_{r+1}^{p,q}$ est un sous-quotient de $E_r^{p,q}$.

3) La suite spectrale de Leray-Serre (thèse de Serre, 1951)

Théorème: Soit $F \to X \xrightarrow{\pi} B$ une fibration. Il existe une suite spectrale

$$E_2^{p,q} = H^p(B, \mathcal{H}^q(F)) \Longrightarrow H^\bullet(X)$$

système local de coefficients sur B de fibres $H^q(F_b)$.

- Fibration : $X \xrightarrow{\pi} B$ a la "propriété de relèvement des homotopies"

$$\begin{tikzcd}
T \times \{0\} \arrow[r, "\tilde{h}_0"] \arrow[d, hook] & X \arrow[d, "\pi"] \\
T \times [0,1] \arrow[r, "h"'] \arrow[ur, dashed, "\exists \tilde{h}"] & B
\end{tikzcd}$$

$\Rightarrow$ (si B connexe) toutes les fibres $F_b = \pi^{-1}(b)$ sont homotopiquement équivalentes

ex: fibration localement triviale, $B = \bigcup B_i$,

$$\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(B_i) \arrow[rr, phantom, "\simeq"] \arrow[dr, "\pi"'] & & B_i \times F \arrow[dl, "pr_1"] \\
& B_i &
\end{tikzcd}$$

- $\mathcal{H}^q(F)$ = système local de fibres $H^q(F_b)$, pour $b \in B$.

(pour $\gamma : b \rightsquigarrow b'$ chemin dans B, $\gamma_* : H^q(F_b) \longrightarrow H^q(F_{b'})$)

$$\updownarrow$$

représentation $\pi_1(B, b_0) \circlearrowleft H^q(F_{b_0})$

Cas simples

1) représentation triviale $\rightsquigarrow E_2^{p,q} = H^p(B, H^q(F))$

$$\simeq H^p(B) \otimes H^q(F)$$

2) $\pi_i(B) = 0 \ \forall i \geq 2 \rightsquigarrow E_2^{p,q} = H^q(\pi_1(B, b_0), H^q(F_{b_0}))$.

- Idée de la preuve (B = un CW-complexe)

Soit $B^0 \subseteq B^1 \subseteq B^2 \subseteq \cdots \subseteq B$ les squelettes de B

Soit $X^{(0)} \subseteq X^{(1)} \subseteq X^{(2)} \subseteq \cdots \subseteq X$ avec $X^{(i)} = \pi^{-1}(B_i)$

On a une filtration $F^p C^\bullet(X) = \ker(C^\bullet(X) \to C^\bullet(X^{(p-1)}))$

de sorte que $gr_F^p C^\bullet(X) = C^\bullet(X^{(p)}, X^{(p-1)})$

On vérifie que $E_1^{p,q} = C^p(B, \mathcal{H}^q(F))$, $d_1^{p,q} = d$.

4) La suite spectrale de Lyndon-Hochschild-Serre (Lyndon 1948, Hochschild-Serre 1953)

Théorème : Soit une suite exacte de groupes

$$1 \to N \to G \to G/N \to 1$$

Pour tout G-module V, il existe une suite spectrale

$$E_2^{p,q} = H^p(G/N, H^q(N,V)) \Longrightarrow H^\bullet(G,V)$$

Preuve : on applique la suite spectrale de Leray-Serre à la fibration $BN \to BG \to B(G/N)$.

↳ version à coefficients

Corollaire : On a l'inégalité des dimensions cohomologiques virtuelles :

$$\operatorname{vcd}(G) \leq \operatorname{vcd}(N) + \operatorname{vcd}(G/N)$$

Preuve : Par la suite spectrale, $H^n(G,V)$ est (non canoniquement) un sous-quotient de $\bigoplus_{p+q=n} H^p(G/N, H^q(N,V))$, qui est 0

si $n > \operatorname{vcd}(N) + \operatorname{vcd}(G/N)$

Corollaire : $\mathrm{vcd}(\Gamma_g) = \mathrm{vcd}(\Gamma_{g,1}) - 2$

Preuve : Notons $d = \mathrm{vcd}(\Gamma_g)$. On a la suite exacte courte

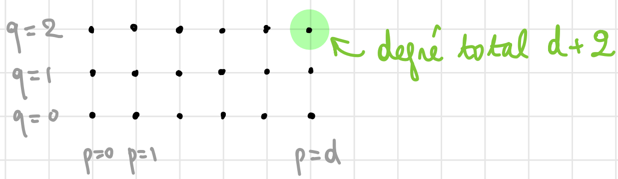
$$1 \to \pi_1(S_g) \longrightarrow \Gamma_{g,1} \longrightarrow \Gamma_g \longrightarrow 1$$

qui montre que $\mathrm{vcd}(\Gamma_{g,1}) \leq \underbrace{\mathrm{vcd}(\pi_1(S_g))}_{=2} + \mathrm{vcd}(\Gamma_g)$

d'où $d \geqslant \mathrm{vcd}(\Gamma_{g,1}) - 2$.

Soit V un Γ_g-module tel que $H^d(\Gamma_g, V) \neq 0$. On applique la suite spectrale :

$$E_2^{p,q} = H^p(\Gamma_g, H^q(\pi_1(S_g), V)) \implies H^\cdot(\Gamma_{g,1}, V)$$



On a donc $H^{d+2}(\Gamma_{g,1}, V) = H^d(\Gamma_g, H^2(\pi_1(S_g), V))$
$$\simeq H^d(\Gamma_g, V) \neq 0$$

donc $\mathrm{vcd}(\Gamma_{g,1}) \geqslant d + 2$.