Coordonnées de Fenchel-Nielsen

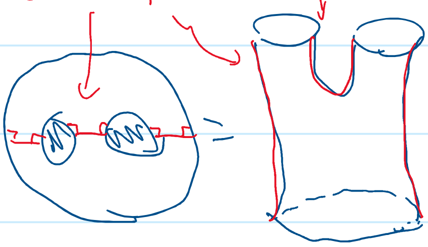
Thursday 18 November 2021 15:02

Trung

Déf : Un pantalon S est une surface à bord, $\mathring{S} \cong S^2 - \{x,y,z\}$

$S \cong D_1 - (D_2 \cup D_3)$

coutures



$\chi(S) = -1$

S est hyperbolique, muni de M_p (métrique de Poincaré).

Espace de Teichmüller sur un pantalon

$\mathcal{H}(S) = \{$ métriques hyperboliques sur S qui rendent ∂D_i géodésiques $\}$

$\mathrm{Diff}_+(S, \partial) = \{$ difféos qui préservent $\ell(\partial_i)\}$

$$T(S) = \mathcal{H}(S) / \mathrm{Diff}_0(S,\partial)$$

Rmq : $\mathrm{Diff}_+(S,\partial) = \mathrm{Diff}_0(S,\partial)$

Rmq : $\mathrm{Diff}_+(S,\partial) = \mathrm{Diff}_0(S,\partial)$

$\Rightarrow \quad \mathcal{M}(S) = \mathcal{T}(S)$.

Coordonnés de FN sur $\mathcal{T}(S)$:

Déf : Une <u>couture</u> sur S := l'unique arc géodésique qui minimise la distance entre les bords.

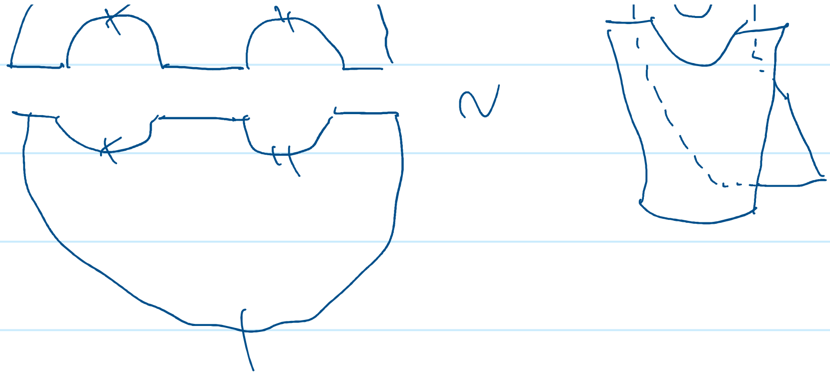
$$\mathcal{T}(S) \longrightarrow (\mathbb{R}_{>0})^3$$

$$[M] \longmapsto (l_M(\partial_1), l_M(\partial_2), l_M(\partial_3))$$

est un homéo (et bien déf).

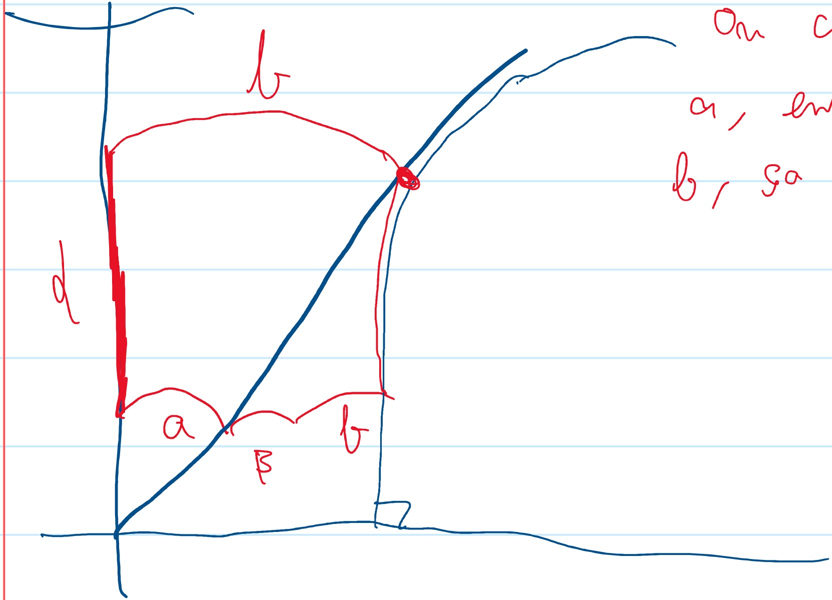
Idée :

Les coutures décomposent S en deux hexagones géodésiques isom. et chaque bord en deux arcs de m longueur.



Lemme : $(a,b,c) \in (\mathbb{R}_{>0})^3$ $\exists!$ hex géodésique dont les côtés non-adjacents sont de longueur (a,b,c)

Existence



On commence par a, ensuite on cherche b, ça force α, etc...

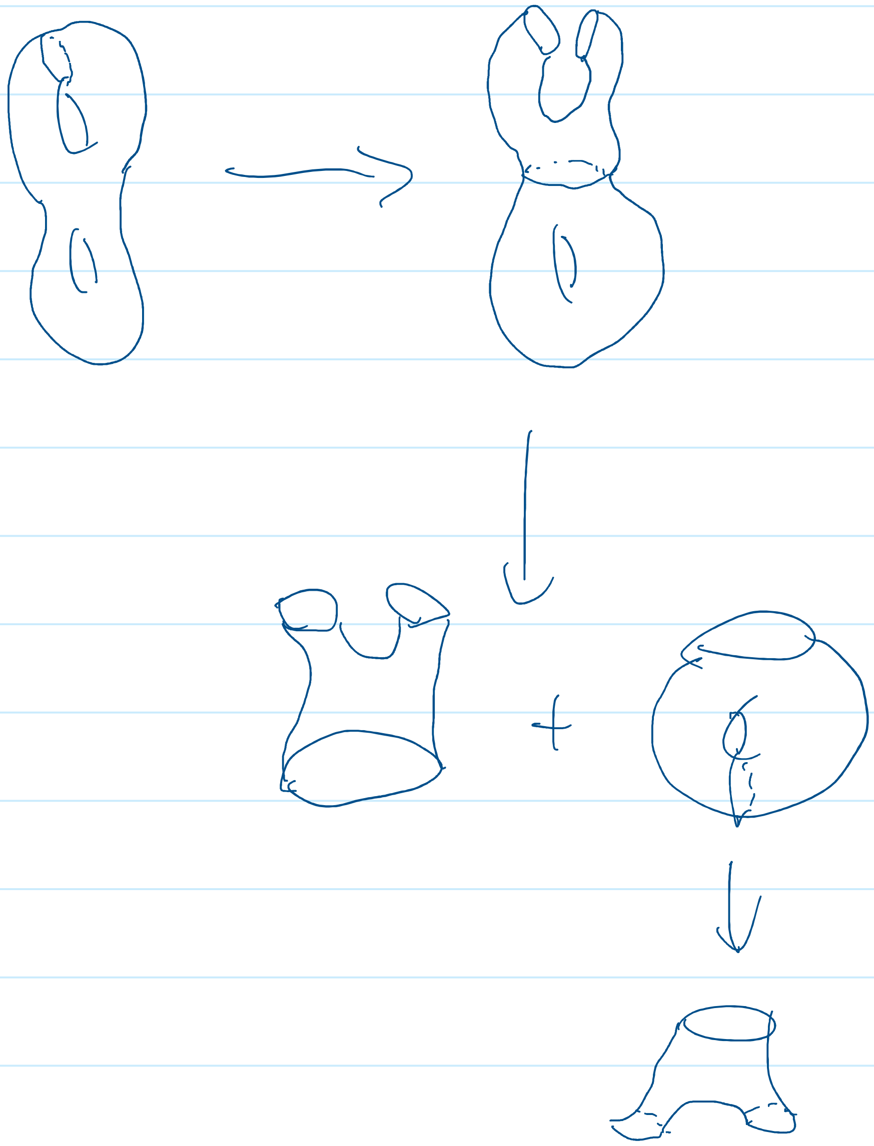
Unicité : relations trigo hyperboliques.

Découpage en pantalons

Idée : Couper le long d'une courbe simple fermée non-homotope à un pt.

$\hat{X}$ surface compacte $P \subset \hat{X}$ ens fini de pts $X = \hat{X} - P$

Ex: $P = \emptyset$ $\hat{X} = X$



Itérer $\longrightarrow$ Si les comp connexes obtenues après l'étape j

$\rightarrow$ À l'étape $j+1$ # π_0 ne change pas $g = g-1$

→ A l'étape $j+1$ — $\#\Pi_0 + 1$

χ :

$$\sum_{i \in \Pi_0} (2g_i - 2 + m) = \text{constant}$$

$\sum (3g_i - 3 + m_i)$ diminue par -1 après chaque étape.

→ $(2g - 2 + 3)$ pantalons après $3g - 3 + m$ découpages.

__Déf__ $(C_1, \dots, C_{3g-3+m}) :=$ découpage en pantalons

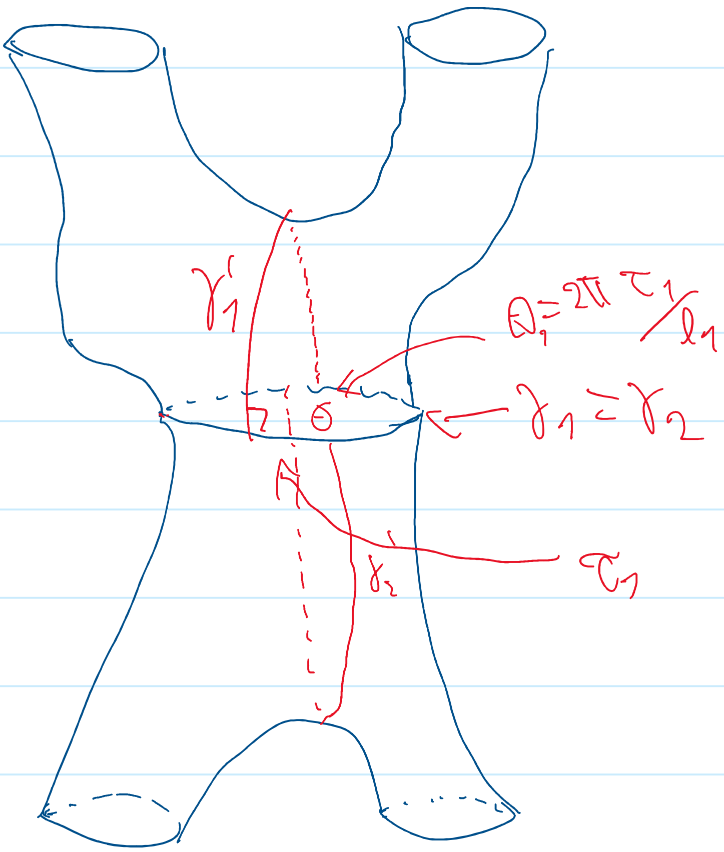
__Prop__ : $\exists$ découpage en pantalons géodésiques, i.e.

$$(\gamma_1, \dots, \gamma_{3g-3+m}) \overset{\text{homotope}}{\sim} (C_1, \dots, C_{3g-3+m})$$

γ_i géodésiques.

Paramètres de torsion

"faire varier dans l'espace de Teichmüller"



$l_1 = l(\gamma_1) = l(\gamma_2)$

$\exists$ unique moyen de relier γ_1' et γ_2' par deux arcs de γ_i de sorte à obtenir une courbe homotope à C_i'. On appelle τ_i la longueur d'un tel arc.

Déf : $$\Theta_i = \frac{2\pi \tau_i}{l_i}$$

Sont les paramètres de torsion.

Thm : $X = \hat{X} - P$, $|P| = n$.

$$\mathcal{T}_{g,n}(X) \longrightarrow (\mathbb{R}_{>0})^{3g-3+n} \times \mathbb{R}^{3g-3+n}$$

$$\mu \longmapsto (\ell_\mu(\gamma_1), \dots, \ell_\mu(\gamma_{3g-3+n}), \theta_1, \dots, \theta_{3g-3+n})$$

est un homéo.

<u>Rmq :</u> $\mathcal{M}_{g,n}(X) \simeq \mathbb{R}_{>0}^{3g-3+n} \times S^{1\,3g-3+n}$

Revêtement $\mathcal{T}_{g,n} \longrightarrow \mathcal{M}_{g,n}$ induit par

$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$