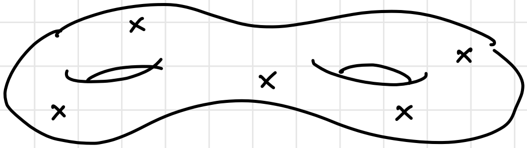
Groupe de travail "Complexes de graphes et espaces de modules de courbes"

$S_{g,n} =$ 

surface compacte de genre g avec n points marqués

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{structures complexes} \\ \text{sur } S_{g,n} \end{array} \right\} \simeq \left\{ \begin{array}{l} \text{métriques hyperboliques} \\ \text{sur } S_{g,n} \end{array} \right\} := H_{g,n}$$

théorème d'uniformisation de Riemann

<u>Déf</u>: $\mathcal{M}_{g,n} := H_{g,n} / \mathrm{Diff}^+(S_{g,n})$

$$\left(\simeq \left\{ \begin{array}{l} \text{courbes algébriques complexes projectives lisses} \\ \text{de genre } g \text{ avec } n \text{ points marqués} \end{array} \right\} / \text{isos} \right)$$

<u>Déf</u>: Espace de Teichmüller $T_{g,n} := H_{g,n} / \mathrm{Diff}_0(S_{g,n})$

isotopes à id

Groupe modulaire $\Gamma_{g,n} := \mathrm{Diff}^+(S_{g,n}) / \mathrm{Diff}_0(S_{g,n})$

$$\simeq \pi_0\left(\mathrm{Diff}^+(S_{g,n})\right)$$

$\Rightarrow \mathcal{M}_{g,n} \simeq T_{g,n} / \Gamma_{g,n}$

- Coordonnées de Fenchel-Nielsen : $T_{g,n} \simeq \mathbb{R}^{2(3g-3+n)}$
- $\Gamma_{g,n} \curvearrowright T_{g,n}$ propre, stabilisateurs finis

$\Rightarrow \; H^{\cdot}(\mathcal{M}_{g,n};\mathbb{Q}) \simeq H^{\cdot}(\Gamma_{g,n};\mathbb{Q})$

- [Harer] la dimension cohomologique virtuelle de $\mathcal{M}_g$ est $4g-5$.
- [Harer-Zagier] $\chi(\mathcal{M}_{g,1}) = \zeta(1-2g)$
- [Church-Farb-Putman, Morita-Sakasai-Suzuki] $H^{4g-5}(\mathcal{M}_g;\mathbb{Q}) = 0$.
- Conjecture : (Kontsevich, CFP) $\forall k \geq 0$, $H^{4g-5-k}(\mathcal{M}_g;\mathbb{Q}) = 0 \quad \forall g \gg 0$.

<u>Théorème</u> : (Chan-Galatius-Payne) $\dim H^{4g-6}(\mathcal{M}_g;\mathbb{Q}) > 1{,}3^g$

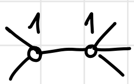
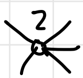
<u>Idée</u> : $\mathcal{M}_{g,n} \subseteq \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ (Deligne-Mumford)

$\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ a une stratification indexée par les graphes (duaux).

$\Rightarrow$ une partie de $H^{\cdot}(\mathcal{M}_{g,n})$ est contrôlée par la combinatoire

théorie de Hodge mixte

("complexe de graphes")

ex : $\partial\Big($  $\Big) =$ 

$$H^{4g-6}(\mathcal{M}_g;\mathbb{Q}) \twoheadrightarrow H_0(GC^{(g)})$$

$$\mathfrak{sl} \leftarrow \text{Willwacher}$$

$\mathfrak{grt}$ (algèbre de Lie de Grothendieck-Teichmüller)

$\uparrow \leftarrow$ Brown

$\mathrm{Lie}(\sigma_3, \sigma_5, \sigma_7, \dots)$

Premiers exposés :

(1) $T_{g,n}$, $\Gamma_{g,n}$, $\mathcal{M}_{g,n}$, exemples

(2) Fenchel-Nielsen ($T_{g,n} \simeq \mathbb{R}^{2(3g-3+n)}$), $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$, exemples

? (3) Structure complexe sur $\mathcal{M}_{g,n}$, $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$

(4) Dimension cohomologique ($\leftarrow$ complexes des courbes)

? (5) $H^{4g-5}(\mathcal{M}_g;\mathbb{Q}) = 0$

(6) Complexe de graphes $\leftrightarrow$ $H^{\cdot}(\mathcal{M}_g;\mathbb{Q})$ (théorie de Hodge mixte ?)

(7) $H_0(GC^{(g)})$ pour g petit

etc.

Alain, Hoel, Anthony, $\overset{\text{dor}}{—}$, $\overset{\text{dre}}{—}$, Jérémy,
Michel, PE, François, Tristan, Sylvain, Sylvain,
Thibaut

Pablo.Montealegre@etu.umontpellier.fr

tran-trung.nghiem@umontpellier.fr